數學傳播 50卷1期, pp. 148-154

千姿百態的玫瑰線

薛黨鵬

摘要: 以探究玫瑰線的形成、性質、應用爲例, 闡釋動態數學軟體與數學教學的融合, 例析 GeoGebra 在學生自主探索, 發現問題、分析問題、解決問題中的應用。

關鍵字: 動態數學軟體 GeoGebra、自主探究、玫瑰線、擺線。

《普通高中課程方案》要求注重培養學生在學習上的自主探究, 鼓勵學生運用資訊技術分析問題、解決問題。圍繞玫瑰線 (rose curve), 我們組織了一次數學探究活動, 運用 GeoGebra 探究玫瑰線的性質及應用, 讓學生在主動獲取知識、經歷深度學習的過程中, 提升綜合能力, 發展核心素養。

1. 初識玫瑰線

我們知道, $\rho=\cos\theta$ 表示圓, 那麼當正整數 m 變化時, $\rho=\cos m\theta$ 表示的曲線如何變化? 對這一問題, 我們引導學生運用 GeoGebra 進行探究。

爲了顯示多條曲線及對應方程, 可運用序列和平移等指令以及取整函數。令

$$\begin{aligned}
&\mathrm{m} = \mathrm{slider}(1,30,1)\\
&\mathrm{l1} = \mathrm{sequence}\Big(\mathrm{translate}\Big(\mathrm{curve}\Big(\big(\cos(n\theta);\theta\big),\theta,0,2\pi\Big),\\
&\qquad \mathrm{vector}\Big(2.5\Big(n-1-5\mathrm{floor}(\frac{n-1}{5})\Big)-2.5, 6-2.5\mathrm{floor}\Big(\frac{n-1}{5}\Big)\Big)\Big), n, 1, m\Big),\\
&\mathrm{l2} = \mathrm{sequence}\Big(\mathrm{text}\Big(\rho=\cos+(n)+\theta,\\
&\qquad \Big(2.5\Big(n-1-5\mathrm{floor}(\frac{n-1}{5})\Big)-3, -2.5\mathrm{floor}(\frac{n-1}{5})+4.7\Big), \mathrm{true}, \mathrm{true}\Big), n, 1, m\Big).
\end{aligned}$$

啟動滑動條 m, 便可得到方程 $\rho=\cos m\theta$, $m=1,2,\ldots,n$ 對應的曲線 (具體的動態圖及指令見 [1])。

圖 1 爲 $n=20$ 時的情形。如果爲 l1 設置上顏色, 則曲線多姿多彩, 特別漂亮。曲線 $\rho=\cos m\theta$ 形似玫瑰, 故常被稱爲玫瑰線。顯然 $\rho=\sin m\theta$ 對應的曲線也爲玫瑰線。

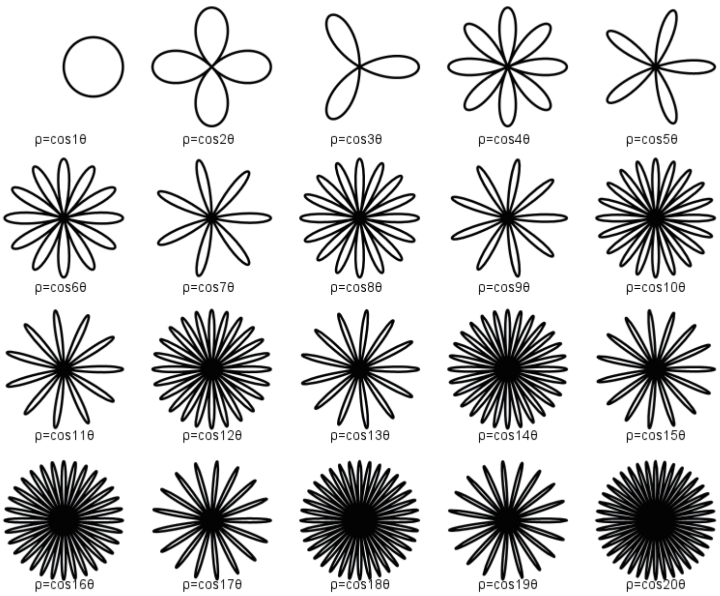

圖1

2. 初探玫瑰線

由圖 1, 我們不難發現玫瑰線 $\rho=\cos m\theta$ 的圖形規律: 當 m 爲偶數時, 玫瑰線有 $2m$ 瓣葉面, 最小正週期爲 2π, 對稱軸爲極軸所在直線和極垂線 (過極點且和極軸垂直的直線); 當 m 爲奇數時, 玫瑰線有 m 瓣葉面, 最小正週期爲 π, 對稱軸爲極軸所在直線。

爲什麼 m 的奇偶性對應的玫瑰線葉瓣數規律不同呢? 這個問題很誘人, 大大激發了學生的探究欲望。

我們可引導學生從 $\rho=\cos m\theta$ 和 $\rho=\cos\theta$ 的聯繫角度進行探討。曲線是由點構成的。在曲線 $\rho=\cos\theta$ 上任取一個非極點 N, 設其極座標爲 $(\rho_0;\theta_0)$, 於是點 $(\rho_0;\frac{\theta_0}{m})$ 就在曲線 $\rho=\cos m\theta$ 上。但是點的極座標具有多樣性, $\big((-1)^k\rho_0;\theta_0+k\pi\big)$ 和 N 表示同一個點, 因此集合 $A=\Big\{\big((-1)^k\rho_0;\dfrac{\theta_0+k\pi}{m}\big)\mid k\in Z\Big\}$ 中的點都在曲線 $\rho=\cos m\theta$ 上。

(1) 當 m 爲偶數時, 集合 A 中有 $2m$ 個不同的元素, 即 $k=0,1,2,\ldots,2m-1$ 時對應的點。這是因爲, 一方面 $k=i$ 對應的點 $\big((-1)^i\rho_0;\dfrac{\theta_0+i\pi}{m}\big)$ 和 $k=i+2m$ 對應的點 $\big((-1)^{i+2m}\rho_0;\dfrac{\theta_0+(i+2m)\pi}{m}\big)=\big((-1)^i\rho_0;\dfrac{\theta_0+i\pi}{m}+2\pi\big)$ 是同一點。
另一方面, 當 $0\le l<l+\Delta\le 2m-1, l,\Delta\in Z$ 時, $k=l$ 對應的點 $\big((-1)^l\rho_0;\dfrac{\theta_0+l\pi}{m}\big)$ 和 $k=l+\Delta$ 對應的點 $\Big((-1)^{l+\Delta}\rho_0;\dfrac{\theta_0+(l+\Delta)\pi}{m}\Big)$, 即 $\big((-1)^l\rho_0(-1)^{\Delta};\dfrac{\theta_0+l\pi}{m}+\dfrac{\Delta\pi}{m}\big)$ 不同。因爲 $\Delta=m$ (偶數) 時, L 和 L' 的極徑相同, 極角相差平角, 兩點顯然不同。當 $\Delta\neq m$ 時, 易知 L 和 L' 的極角不共線, 兩點不同。

(2) 當 m 爲奇數時, 集合 A 中有 m 個元素, 即爲 $k=0,1,2,\ldots,m-1$ 對應的點。這是因爲, 一方面 $k=i$ 對應的點 $\big((-1)^i\rho_0;\dfrac{\theta_0+i\pi}{m}\big)$ 和 $k=i+m$ 對應的點 $\big((-1)^{i+m}\rho_0;\dfrac{\theta_0+(i+m)\pi}{m}\big)$, 即 $\big(-(-1)^i\rho_0;\dfrac{\theta_0+i\pi}{m}+\pi\big)$ 顯然是同一點。另一方面, 當 $0\le l<l+\Delta\le m-1$, $l,\Delta\in Z$ 時, $k=l$ 對應的點 $\big((-1)^l\rho_0;\dfrac{\theta_0+l\pi}{m}\big)$, $k=l+\Delta$ 對應的點 $\big((-1)^{l+\Delta}\rho_0;\dfrac{\theta_0+(l+\Delta)\pi}{m}\big)$, 即 $\big((-1)^l\rho_0(-1)^{\Delta};\dfrac{\theta_0+l\pi}{m}+\dfrac{\Delta\pi}{m}\big)$, 這兩個點的極角顯然不共線, 因此兩點不同。

以上討論表明, 當 m 爲偶數時, 圓 $\rho=\cos\theta$ 上的一個點 (非極點) 和曲線 $\rho=\cos m\theta$ 上的 $2m$ 個點對應。我們將圓 $\rho=\cos\theta$ 上每個點的非負極徑不變, $\big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\big)$ 內的極角變爲原來的 $\dfrac{1}{m}$, 以此"將圓壓扁", 就可得到曲線 $\rho=\cos m\theta$ 的一頁花瓣, 再將其繞著極點逆時針旋轉 $i\cdot\dfrac{\pi}{m}$ $(i=1,2,\ldots,2m-1)$, 即可得到其他的 $2m-1$ 頁花瓣。

同樣地, 當 m 爲奇數時, 圓 $\rho=\cos\theta$ 上的一個點和曲線 $\rho=\cos m\theta$ 上的 m 個點對應, 我們將圓 $\rho=\cos\theta$ 上每個點的非負極徑不變, $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 內的極角變爲原來的 $\dfrac{1}{m}$, 即可得到曲線 $\rho=\cos m\theta$ 的一頁花瓣, 再將其繞著極點逆時針旋轉 $i\cdot\dfrac{2\pi}{m}$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$, 即可得到其他的 $m-1$ 頁花瓣。

理解了花瓣數之後, 週期也就好理解了。事實上, 當 m 爲奇數時, 設 $P(\rho_0,\theta_0)$ 爲曲線 $\rho=\cos m\theta$ 上的點, 即 $\rho_0=\cos(m\theta_0)$, 則 $\cos\big(m(\theta_0+\pi)\big)=-\cos(m\theta_0)=-\rho_0$, 而 $P'(-\rho_0,\theta_0+\pi)$ 和 $P(\rho_0;\theta_0)$ 是同一點。所以, 當 m 爲奇數時, π 爲玫瑰線 $\rho=a\cos(m\theta)$ 的週期。

當 m 爲偶數時, 設 $P(\rho_0;\theta_0)$ 爲曲線 $\rho=\cos m\theta$ 上的點, 即 $\rho_0=\cos(m\theta_0)$, 則 $\cos\big(m(\theta_0+\pi)\big)=\cos(m\theta_0)=\rho_0$, $\cos\big(m(\theta_0+2\pi)\big)=\cos(m\theta_0)=\rho_0$, 而 $P'(\rho_0;\theta_0+\pi)$ 和 $P(\rho_0;\theta_0)$ 不是同一點 (當 $\rho_0\neq 0$ 時), $P''(\rho_0;\theta_0+2\pi)$ 和 $P(\rho_0;\theta_0)$ 是同一點。因此, 當 m 爲偶數時, π 不是玫瑰線 $\rho=a\cos(m\theta)$ 的週期, 但 2π 是週期。

對稱性的證明類似。設 $P(\rho_0;\theta_0)$ 爲玫瑰線 $\rho=\cos m\theta$ 上的點, 由 $\cos\big(m(-\theta_0)\big)=\cos m\theta_0=\rho_0$ 知, P 關於極軸直線的對稱點 $P'(\rho_0;-\theta)$ 也在玫瑰線上。所以, $\rho=\cos(m\theta)$ 關於極軸直線對稱。而由

$$\cos m(\pi-\theta_0)=\cos(m\pi-m\theta_0)=\begin{cases}\cos m\theta_0=\rho_0, & m \text{ 爲偶數,}\\ -\cos m\theta_0=-\rho_0, & m \text{ 爲奇數。}\end{cases}$$

知, 當 m 爲偶數時, 玫瑰線關於極垂線對稱; m 爲奇數時, 玫瑰線不關於極垂線對稱。

3. 再探玫瑰線

當 m 是分數時, $\rho=\cos m\theta$ 對應的曲線是什麼樣子? 有什麼規律呢? 我們可以繼續用 GeoGebra 進行探討 (具體的動態圖及指令見 [1]).

由圖 2, 我們不難發現玫瑰線 $\rho=\cos\dfrac{n\theta}{m}$ (n,m 爲互質的正整數, $n>m\geq 2$) 的變化規律: 當 n,m 均爲奇數時, 玫瑰線有 n 瓣葉面, 最小正週期爲 $m\pi$, 曲線關於極軸直線 (極軸所在直線) 對稱。當 n,m 爲一個奇數一個偶數時, 玫瑰線有 $2n$ 瓣葉面, 最小正週期爲 $2m\pi$, 曲線關於極軸直線和極垂線對稱。

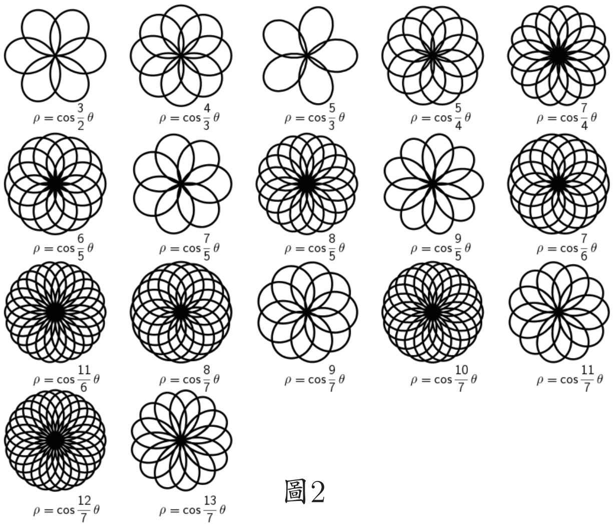

圖2

由圖 3, 我們不難發現, $m>n>1$ 時玫瑰線 $\rho=\cos\dfrac{n\theta}{m}$ (n,m 爲互質的正整數) 的花瓣較 $n>m\geq 2$ 時要大好多, 但是花瓣數、週期及對稱性的規律仍然保持不變。

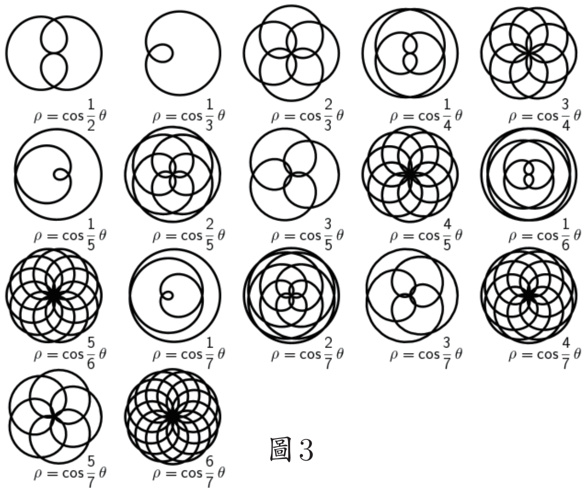

圖3

顯然, 玫瑰線的花瓣數就是 $\rho=\cos\dfrac{n\theta}{m}$ 和圓 $\rho=1$ 的公共點的個數。我們以此來探討花瓣數的規律。

$$\cos\frac{n\theta}{m}=1 \ \Rightarrow\ \frac{n\theta}{m}=2k\pi \ \Rightarrow\ \theta=2k\pi\cdot\frac{m}{n},\quad k\in Z.$$

於是, 由 $2(k+n)\pi\cdot\dfrac{m}{n}=2k\pi\cdot\dfrac{m}{n}+2m\pi$ 及 $2k_1\pi\cdot\dfrac{m}{n}-2k_2\pi\cdot\dfrac{m}{n}=2(k_1-k_2)\pi\cdot\dfrac{m}{n}\neq 2i\pi$, $(1\le k_2<k_1\le n,\ k_1,k_2,i\in Z)$ 知, 玫瑰線 $\rho=\cos\dfrac{n\theta}{m}$ 上的最大極徑點共 n 個, 且可以排成點列:

$$A=\{(1;2k\pi\cdot\frac{m}{n})\},\ 其中,\ k=1,\ldots,n,$$

$$\cos\frac{n\theta}{m}=-1 \ \Rightarrow\ \frac{n\theta}{m}=(2k+1)\pi \ \Rightarrow\ \theta=(2k+1)\pi\cdot\frac{m}{n},\ k\in Z.$$

於是, 由 $\dfrac{(2(k+n)+1)m\pi}{n}=\dfrac{2(k+1)m\pi}{n}+2m\pi$ 及 $(2k_1+1)\pi\cdot\dfrac{m}{n}-(2k_2+1)\pi\cdot\dfrac{m}{n}=2(k_1-k_2)\pi\cdot\dfrac{m}{n}\neq 2i\pi$ $(1\le k_2<k_1\le n,\ k_1,k_2,i\in Z)$ 知, 玫瑰線 $\rho=\cos\dfrac{n\theta}{m}$ 的最小極徑點共 n 個, 且可以排成 n 元點列:

$$B=\{(-1;(2k+1)\pi\cdot\frac{m}{n})\},\ 其中,\ k=1,\ldots,n.$$

玫瑰線 $\rho=\cos\dfrac{n\theta}{m}$ 和圓 $\rho=1$ 的公共點的個數即爲花瓣數, 而這顯然取決於 $A\cup B$ 的元素個數。爲此, 我們考察 A 中的第 k 個點和 B 中的第 k' 個點是否重合, 設

$$a=(2k+1)\pi\cdot\frac{m}{n}-2k'\pi\cdot\frac{m}{n}=\big(2(k-k')+1\big)\pi\cdot\frac{m}{n}.$$

如果 m,n 均爲奇數, 當 $k\ge\frac{n-1}{2}$ 時, 令 $k'=k-\frac{n-1}{2}$; 當 $k<\frac{n-1}{2}$ 時, 令 $k'=\frac{n-1}{2}-k$。此式, $a=m\pi$ 或 $a=-m\pi$, 點列 A 中的第 k 個點和 B 中的第 k' 個點重合。因此, $A\cup B$ 的元素個數爲 n。

如果 m,n 中只有一個奇數, 則易知, 對任意 $u\in Z$, $a\neq(2u+1)\pi$, 所以, A 和 B 中不存在相同點, 從而, $A\cup B$ 爲 $2n$ 元集。

據此, 我們就可以斷定, 對於 $\rho=\cos\frac{n\theta}{m}$ $(n,m$ 爲互質的正整數), 當 n,m 爲均爲奇數時, 有 n 瓣葉面; 當 n,m 爲一個奇數一個偶數時, 有 $2n$瓣葉面。

當 m 爲無理數時, 曲線 $\rho=\cos m\theta$ 上的極徑最大點構成的集合 $P=\{(1;\frac{2k\pi}{m})\mid k\in Z\}$ 和極徑最小點構成的集合 $Q=\{(-1;\frac{(2k+1)\pi}{m})\mid k\in Z\}$ 顯然都是無窮集。因此, 玫瑰線 $\rho=\cos m\theta$ $(m\in R)$ 的花瓣數爲無窮大。在作圖軟體中, 無理數一般是用小數近似表示的。對於曲線 $\rho=\cos(\sqrt{2}\theta)$, 當我們提高系統的精確度, 並擴大變數 θ 的範圍時, 就會發現曲線的花瓣數急速增加。

4. 玫瑰線與擺線

當一個動圓繞著另一個定圓在其外部 (或內部) 旋轉時, 動圓上的定點可形成漂亮的曲線。此曲線就是擺線 (cycloid)。當定點不在動圓上, 而在動圓的外部時, 軌跡被稱爲長幅擺線 (prolate cycloid); 當定點在動圓的內部時, 軌跡被稱爲短幅擺線 (curtate cycloid). 長幅擺線和短幅擺線統稱爲變幅擺線 (variable amplitude cycloid)。變幅擺線可視爲擺線的一般化。利用 GeoGebra, 我們可方便地作出圓滾動形成擺線或變幅擺線的動圖 [1]。

設圓心爲 $O(0,0)$, 半徑爲 R 的定圓上有動點 P, 在 OP上取 O_1, 使得 $PO_1=r$, 以 O_1 爲圓心, 經過點 P 作圓。再將 P 繞著 O_1旋轉 $\frac{R}{r}\alpha$ 後所得點記爲 M, 在 O_1M 上取點 Q, 使得 $O_1Q=h$。

我們啟動點 P, 將 M 設爲跟蹤, 即可得到其軌跡 — 擺線。若將 Q 點設爲跟蹤, 則可得到其軌跡 — 變幅擺線。

特殊地, 我們取 $R=1$, $r=-\frac{1}{3}$, $h=\frac{2}{3}$, 我們會神奇地發現Q點的軌跡似乎爲三葉玫瑰線。

事實上, 玫瑰線就是一種特殊的變幅擺線, 特殊在 $h=R+r$。下面, 給出嚴格證明。

當 $r<0$ 時, 如圖 4, 設 $A(R,0)$, $\angle AOP=\alpha$, $\angle PO_1Q=\frac{R}{r}\alpha$。設 Q 點的極座標爲 $(\rho;\theta)$。由 $h=R+r$ 知, $|OO_1|=|O_1Q|$, 於是 $\theta=\alpha+\frac{R}{2r}\alpha$, $\alpha=\dfrac{1}{1+\dfrac{R}{2r}}\theta$, 且

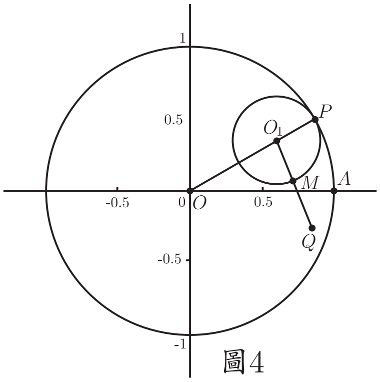

圖4

$$\begin{aligned}\rho=OQ&=2|OO_1|\cos\left(\frac{R}{2r}\alpha\right)\\&=2(R+r)\cos\left(\frac{R}{2r}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{R}{2r}}\theta\right)\\&=2(R+r)\cos\left(\frac{1}{1+\dfrac{2r}{R}}\theta\right).\end{aligned}$$

這顯然是玫瑰線的方程。特殊地, 當 $R=1$, $r=-\frac{1}{3}$, $h=\frac{2}{3}$ 時, 變幅擺線方程爲 $\rho=\frac{4}{3}\cos 3\theta$, 對應曲線爲三葉玫瑰線; 當 $R=1$, $r=-\frac{1}{4}$, $h=R+r=\frac{3}{4}$ 時, 變幅擺線方程爲 $\rho=\frac{3}{2}\cos 2\theta$, 對應曲線爲四葉玫瑰線。

當 $r>0$ 時, 如圖 5, 設 Q 點的極座標爲 $(\rho;\theta)$。則 $\theta=\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{R}{2r}\alpha\right)=\alpha+\frac{R}{2r}\alpha-\frac{\pi}{2}$, 於是 $\alpha=\dfrac{1}{1+\dfrac{R}{2r}}(\theta+\frac{\pi}{2})$, 於是

$$\begin{aligned}\rho = OQ &= 2|OO_1|\sin\left(\frac{R}{2r}\alpha\right)\\ &=2(R+r)\sin\left(\frac{R}{2r}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{R}{2r}}\big(\theta+\frac{\pi}{2}\big)\right)\\ &=2(R+r)\sin\left(\frac{1}{1+\dfrac{2r}{R}}\big(\theta+\frac{\pi}{2}\big)\right).\end{aligned}$$

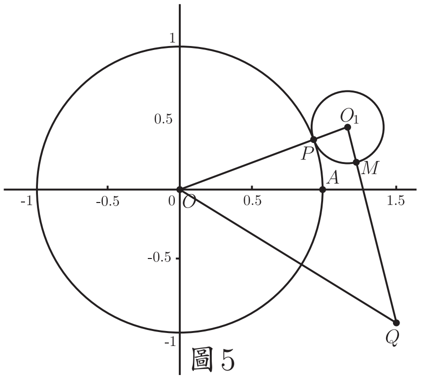

圖5

這顯然也是玫瑰線的方程。特殊地, $R=1$, $r=\frac{1}{2}$, $h=\frac{3}{2}$ 時, 變幅擺線方程爲 $\rho=3\sin\left(\frac{1}{2}\big(\theta+\frac{\pi}{2}\big)\right)$; 當 $R=1$, $r=\frac{1}{3}$, $h=R+r=\frac{4}{3}$ 時, 變幅擺線方程爲 $\rho=\frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{5}\big(\theta+\frac{\pi}{2}\big)\right)$。

玫瑰線很美, 因爲它不僅變化萬千, 變中有序, 而且還和擺線同屬一個家族。

數學很美, 因爲它不僅可以刻畫美, 揭示美, 而且可以創造美。有人說:「上帝是數學家, 唯一能夠描述宇宙的語言是數學」。無論我們是否相信上帝, 我們都相信數學。讓我們師生一起在好學數學、用好數學的過程中, 盡情享受數學的美。

(本文的寫作得到了中國陝西省西安中學徐君鎔老師的幫助, 特別致謝。)

參考文獻

1. 薛黨鵬。多姿多彩的玫瑰線。https://www.geogebra.org/m/mqpgmnw5.
2. 丁浩勇。資訊技術環境下數學實驗教學的行動研究[M]。數學教學, 2019(09), 22-25。
3. 羅建宇。從融合到創新: 基於 GeoGebra 的數學深度教學 [M]。數學通報, 2020(02), 23-26。

—本文作者任教中國陝西省西安中學—